

APPLICATION DE LA PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE AU CALCUL A LA RUPTURE DES STRUCTURES

M. CROC, G. MICHEL et J. SALENÇON

Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique, Paris, France

Résumé—Le problème étudié est celui de la détermination de la charge limite de structures monodimensionnelles. On montre qu'une méthode d'aspect statique souvent utilisée, a en fait le caractère de méthode cinématique, donnant une valeur par excès de la charge limite; on propose une méthode réellement statique commodément applicable, permettant d'obtenir une valeur par défaut.

La dualité entre les formulations de ces deux méthodes est examinée. On démontre la convergence des procédés lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro.

1. INTRODUCTION

L'APPLICATION de la programmation mathématique au calcul à la rupture des structures a été largement étudiée [3, 4, 10, 11] en particulier par Ceradini et Gavarini dans une série d'articles récents [1, 2, 5-7] auxquels nous nous référerons dans la suite.

Dans cet article nous considérons les cas de structures monodimensionnelles; celles-ci sont soumises à des charges constantes et à des charges variant proportionnellement à un paramètre de charge λ .

Pour ces structures nous proposons une méthode d'approximation de la charge limite, véritablement statique, la vérification de la condition sur le critère étant faite partout et non plus seulement en les points de discrétisation; nous montrons le caractère de méthode cinématique, d'une méthode d'aspect statique souvent utilisée; la question de la dualité mathématique entre les formulations des méthodes statique et cinématique est étudiée en détails afin d'éviter certains malentendus; nous donnons également la démonstration de la convergence des méthodes statique et cinématique employées vers la valeur exacte de la charge limite, lorsque le pas de la discrétisation tend vers zéro, résultat qui est en général admis de façon heuristique.

2. POSITION DU PROBLEME—CHAMPS LICITES

Les structures étudiées sont monodimensionnelles avec un plan de flexion (par exemple des poutres continues, des cadres plans), et sont chargées dans ce plan.

On suppose que la ruine dans une section y est déterminée uniquement par la valeur du moment fléchissant, M , et se produit lorsque M atteint en flexion positive ou négative la valeur limite M_0^+ ou $-M_0^-$; (M_0^+ et M_0^- , valeurs absolues des moments limites, sont éventuellement fonctions de la section). Le critère de ruine de la section est :

$$-M_0^- \leq M \leq M_0^+. \quad (1)$$

Si $M = M_0^+(-M_0^-)$, une rotule « plastique » se forme dans la section, la rotation θ étant arbitraire dans le sens de la flexion.

Avec ces hypothèses, il est possible d'appliquer pour l'étude de ces structures, les résultats de la théorie des charges limites.

Pour ce faire, on introduit les notions de distribution de moment fléchissant licite (ou statiquement et plastiquement admissible):

satisfaisant l'équilibre du système et les conditions à la limite}statiquement admissible ;
ne violant (1) dans aucune section}plastiquement admissible ;

mode de déformation licite (ou cinématiquement et plastiquement admissible);

respectant les conditions à la limite, dans lequel la structure est transformée en mécanisme dans sa totalité ou en partie par apparition de « rotules plastiques » localisées dans certaines sections.

La structure étudiée est soumise à des charges constantes soit symboliquement I , et à des charges variant proportionnellement à un paramètre λ , positif, soit λV .

On suppose qu'il n'y a pas ruine de la structure sous l'action des charges constantes uniquement (i.e. pour $\lambda = 0$), et on cherche à déterminer la valeur limite λ_1 positive.

Par la méthode statique, on a le résultat suivant :

Considérant toutes les distributions de moment fléchissant licites pour la structure, la charge limite λ_1 est la plus grande des valeurs de λ correspondant à ces distributions.

Par la méthode cinématique.

Considérons un mode de déformation licite.

Soit PD la puissance dissipée dans ce mode de déformation, c'est-à-dire :

$$PD = \Sigma(M_0^+\theta^+ + M_0^-\theta^-). \quad (2)^\dagger$$

La puissance des forces extérieures est $(PI + \lambda \times PV)$ en désignant par PI la puissance des forces constantes et par PV la puissance des forces variables pour $\lambda = 1$.

Alors, d'après les résultats de la théorie des charges limites on sait que λ défini par la formule (3):

$$\lambda = \frac{PD - PI}{PV} \quad (3)$$

est extérieur aux valeurs de λ admissibles pour la structure.

Par hypothèse, le chargement $\lambda = 0$, étant licite, on a nécessairement $PD - PI > 0$.

Si on impose aux modes de déformation licites considérés de vérifier $PV > 0$, on peut énoncer :

λ_1 est la plus petite valeur de λ obtenues par la formule (3) en considérant tous les modes de déformation licites dans lesquels la puissance des forces variables est positive.

† Somme étendue à toutes les rotules « plastiques ». On décompose la rotation θ d'une rotule en :

$$\theta^+ = \frac{|\theta| + \theta}{2} \quad \theta^- = \frac{|\theta| - \theta}{2}.$$

3. ETUDE D'UNE STRUCTURE DE CARACTERISTIQUES HOMOGENES, SOUMISE UNIQUEMENT A DES FORCES CONCENTREES

La structure étudiée est une structure en forme de ligne brisée, de caractéristiques uniformes (i.e. M_0^+ et M_0^- constants), telle que celle purement schématisée représentée à la Fig. 1.

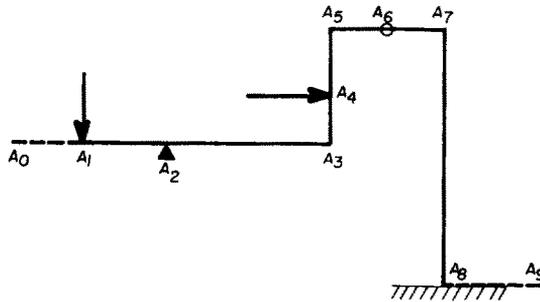


FIG. 1.

Elle est soumise uniquement à des forces concentrées.

Les points de subdivision « naturels » sont les points d'application des forces concentrées actives, les points d'appuis (points d'application des forces de réaction) les points anguleux de la ligne moyenne de la structure (angles d'un cadre par exemple) les rotules mécaniques dans la structure, et les extrémités de celle-ci.

Soient A_1, A_2, \dots, A_n , ces points numérotés de gauche à droite pour fixer les idées, parmi lesquels nous distinguerons :

- $A_{i\alpha} (\alpha = 1, \dots, p)$: points d'application des forces V ;
- $A_{i\beta} (\beta = 1, \dots, q)$: ensemble complémentaire de $A_{i\alpha}$ dans A_i , $i = (1, \dots, n)$;
- $A_{i\gamma} (\gamma = 1, \dots, r)$: points d'appuis ;
- $A_{i\delta} (\delta = 1, \dots, s)$: rotules mécaniques et extrémités libres ;
- $A_{i\epsilon} (\epsilon = 1, \dots, t)$: points d'application des forces I .

3.1 Application de la méthode cinématique

On applique la méthode cinématique en considérant une classe de modes de déformation licites pour la structure : les modes de déformation obtenus en plaçant des rotules plastiques en les points $A_{i\beta}$ uniquement,† et vérifiant la condition : $PV > 0$ (4), et les conditions aux limites.

Soient : u_i, v_i : composantes de la vitesse de $A_i(x_i, y_i)$;

$$\omega_i = \frac{d}{dt}(0x, A_i A_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n; \tag{4}$$

$$\theta_i = \frac{d}{dt}(A_{i-1} A_i, A_i A_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n;$$

† Ce sont les points où il n'y a ni rotule mécanique, ni extrémité libre.

(on introduit pour la commodité les segments de structure virtuels A_0A_i et A_nA_{n+1} parallèles à Ox).

X_{i_x}, Y_{i_x} : composantes des forces V appliquées en A_{i_x} .

K_{i_e}, L_{i_e} : composantes des forces I appliquées en A_{i_e} .

Pour calculer le meilleur majorant de la charge limite fourni par cette classe de modes de déformation licites on a à résoudre le problème suivant :

Minimiser :

$$\lambda = \left[\sum_{i_\beta} (M_0^+ \theta_i^+ + M_0^- \theta_i^-) - \sum_{i_e} (K_i u_i + L_i v_i) \right] / \sum_{i_x} (X_i u_i + Y_i v_i) \quad (5)$$

sur cette classe de modes de déformation licites, c'est-à-dire sous les contraintes :

$$\omega_i = \sum_{k=1}^i \theta_k \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

$$u_{i+1} = u_i - \omega_i (y_{i+1} - y_i) \quad i = 1, \dots, (n-1) \quad (7)$$

$$v_{i+1} = v_i + \omega_i (x_{i+1} - x_i) \quad i = 1, \dots, (n-1) \quad (8)$$

$$\theta_i = \theta_i^+ - \theta_i^- \quad i = 1, \dots, n \quad (9)$$

$$\theta_i^+ \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (10)$$

$$\theta_i^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (11)$$

$$\omega_n = 0 \quad (12)$$

$$u_{i_\gamma} = 0 \quad \gamma = 1, \dots, r \quad (13)$$

$$v_{i_\gamma} = 0 \quad \gamma = 1, \dots, r \quad (14)$$

$$\sum_{i_x} (X_i u_i + Y_i v_i) > 0 \quad (15)$$

(6) à (12) représentent les relations géométriques nécessairement vérifiées dans la structure, (13) et (14) le respect des conditions aux limites, (15) est la condition (4).

D'autre part, on a :

$$PD - PI = \sum_{i_\beta} (M_0^+ \theta_i^+ + M_0^- \theta_i^-) - \sum_{i_e} (K_i u_i + L_i v_i) \quad (16)$$

dont on doit vérifier la positivité, non comme une condition sur le mode de déformation, mais comme une vérification de l'hypothèse selon laquelle le chargement $\lambda = 0$ est admissible pour la structure.

Le numérateur et le dénominateur de (5), les égalités et inégalités (6) à (15) sont positivement homogènes de degré 1 ou (u_i, v_i, θ_i) .

D'après cette remarque, et compte-tenu de (15), on voit que l'on peut obtenir tout le champ de valeurs de λ fourni par la classe de modes de déformation licites considérées en ne prenant que ceux de ces mécanismes pour lesquels le premier membre de (15) a une valeur constante, par exemple :

$$\sum_{i_x} X_i u_i + Y_i v_i = Aa. \quad (17)$$

Aa unité de puissance que dans la suite nous remplacerons par 1, supposant ainsi toutes les grandeurs sans dimension.

Le problème est donc un problème de programmation linéaire :

Minimiser,

$$\sum_{i_\beta} (M_0^+ \theta_i^+ + M_0^- \theta_i^-) - \sum_{i_c} (K_i u_i + L_i v_i) \quad (18)$$

sous les contraintes (6) à (14) et (17).

D'après le § 2, le minimum de ce programme est un majorant de la charge limite.

3.2 Application de la méthode statique

Toutes les distributions de moment fléchissant statiquement admissibles (S.A.) pour la structure étudiée sont obtenues si l'on se donne arbitrairement les valeurs :

- des forces extérieures $(I + \lambda V)$, i.e. la valeur de λ ;
- des réactions des appuis ;

sous les réserves que celles-ci forment un système en équilibre et que le moment fléchissant s'annule aux points A_{i_δ} .

Le diagramme de la distribution de moment fléchissant correspondante est alors un diagramme en ligne brisée dont les angles se situent aux points A_i .

Pour que cette distribution soit aussi plastiquement admissible, il est donc nécessaire et suffisant que (1) soit vérifiée en les points A_{i_β} .

L'application exhaustive de la méthode statique pourra donc se faire comme suit :
On introduit comme variables :

$P_i, Q_i, i = 2, \dots, n$: composantes de la résultante des efforts exercés à droite de la section immédiatement à gauche du point A_i . (P_1, Q_1 étant évidemment nuls).

$R_{i_\gamma}, S_{i_\gamma}$: composantes de la réaction d'appui en A_{i_γ} ;

μ : moment d'encastrement en A_n ;

λ : facteur de chargement.

Le problème s'écrit :

Maximiser λ

sous les conditions :

$$-P_i + P_{i+1} + \lambda \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} X_{i_\alpha} \delta_{i,i_\alpha} + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=r} R_{i_\gamma} \delta_{i,i_\gamma} + \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=t} K_{i_\varepsilon} \delta_{i,i_\varepsilon} = 0 \quad (19)$$

$$-Q_i + Q_{i+1} + \lambda \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} Y_{i_\alpha} \delta_{i,i_\alpha} + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=r} S_{i_\gamma} \delta_{i,i_\gamma} + \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=t} L_{i_\varepsilon} \delta_{i,i_\varepsilon} = 0. \quad (20)$$

Pour $i = 1, \dots, n$, avec $P_1 = Q_1 = 0$.

$$-P_n + \lambda \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} X_{i_\alpha} \delta_{n,i_\alpha} + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=r} R_{i_\gamma} \delta_{n,i_\gamma} + \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=t} K_{i_\varepsilon} \delta_{n,i_\varepsilon} = 0 \quad (21)$$

$$-Q_n + \lambda \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} Y_{i_\alpha} \delta_{n,i_\alpha} + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=r} S_{i_\gamma} \delta_{n,i_\gamma} + \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=t} L_{i_\varepsilon} \delta_{n,i_\varepsilon} = 0 \quad (22)$$

$$\mu + (x_n - x_{n-1})Q_n + \dots + (x_{i+1} - x_i)Q_{i+1} - (y_n - y_{n-1})P_n - \dots - (y_{i+1} - y_i)P_{i+1} \leq M_0^+ \left| \sum_{\beta=1}^{\beta=q} \delta_{i,i_\beta} \right| \quad (23)^\dagger$$

$$-\mu - (x_n - x_{n-1})Q_n - \dots - (x_{i+1} - x_i)Q_{i+1} + (y_n - y_{n-1})P_n + \dots + (y_{i+1} - y_i)P_{i+1} \leq M_0^- \left| \sum_{\beta=1}^{\beta=q} \delta_{i,i_\beta} \right| \quad i = 1, \dots, n \quad (24)$$

où (19) et (20) traduisent l'équilibre de chaque tronçon $A_i A_{i+1}$ de la structure; (21) et (22) expriment l'équilibre des forces au point A_n : c'est la condition d'équilibre des forces appliquées à la structure.

(23) et (24) contiennent la vérification de (1) en les points A_{i_β} et la vérification de la condition d'équilibre « moment nul en les points A_{i_β} ».

Il s'agit donc d'un problème de programmation linéaire [4n contraintes, (2n+2r) variables].

Le maximum de ce programme est la valeur exacte de la charge limite car, ainsi que nous l'avons dit, dans cette méthode statique on a considéré toutes les distributions de moment fléchissant licites.

3.3 Application du théorème de dualité de la programmation linéaire

En ne conservant que les 4n variables utiles ($u_i, v_i, \theta_i^+, \theta_i^-$) le programme linéaire de la méthode cinématique s'écrit:

Minimiser:

$$\sum_{\beta=1}^{\beta=q} (M_0^+ \theta_{i_\beta}^+ + M_0^- \theta_{i_\beta}^-) - \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=r} (K_{i_\varepsilon} u_{i_\varepsilon} + L_{i_\varepsilon} v_{i_\varepsilon}) \quad (16)$$

sous

$$-u_{i+1} + u_i - \sum_{k=1}^i \theta_k^+ (y_{i+1} - y_i) + \sum_{k=1}^i \theta_k^- (y_{i+1} - y_i) = 0 \quad (25)$$

$$-v_{i+1} + v_i - \sum_{k=1}^i \theta_k^+ (x_{i+1} - x_i) + \sum_{k=1}^i \theta_k^- (x_{i+1} - x_i) = 0 \quad (26)$$

Pour $i = 1, \dots, (n-1)$;

$$u_{i_\gamma} = 0 \quad \gamma = 1 \dots r; \quad (13)$$

$$v_{i_\gamma} = 0 \quad \gamma = 1 \dots r; \quad (14)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} (X_{i_\alpha} u_{i_\alpha} + Y_{i_\alpha} v_{i_\alpha}) = 1; \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} (\theta_i^+ - \theta_i^-) = 0; \quad (12)$$

$$\theta_i^+ \geq 0 \quad i = 1 \dots n; \quad (10)$$

$$\theta_i^- \geq 0 \quad i = 1 \dots n. \quad (11)$$

$\dagger \delta$, symbole de Kronecker. Remarquer que $\sum_{\beta=1}^{\beta=q} \delta_{i,i_\beta}$ vaut 1 si i appartient à l'ensemble des i_β , et 0 s'il n'y appartient pas.

Il suffit alors d'écrire le programme dual† pour voir que celui-ci n'est autre que le programme linéaire de la méthode statique, les variables duales w qui y interviennent sont, dans l'ordre :

$$\begin{aligned} w_k &= -P_{k+1} & 1 \leq k \leq n-1; \\ w_{n+k-1} &= -Q_{k+1} & 1 \leq k \leq n-1; \\ w_{2n-2+\gamma} &= R_{i_\gamma} & 1 \leq \gamma \leq r; \\ w_{2n-2+r+\gamma} &= S_{i_\gamma} & 1 \leq \gamma \leq r; \\ w_{2n+2r-1} &= \lambda \\ w_{2n+2r} &= -\mu \end{aligned}$$

et d'après le théorème de dualité les deux programmes ont même optimum.

Ceci démontre :

- (a) que la méthode statique du § 3.2 fournit la valeur exacte de la charge limite (ce que l'on savait déjà);
- (b) que le majorant, fourni par la méthode cinématique du § 3.1 est la valeur exacte de la charge limite.

On pourra donc se borner à l'utilisation d'une seule méthode : la méthode cinématique par exemple, dont la mise en équation paraît plus commode du point de vue pratique.

3.4 Généralisation du résultat

L'origine du résultat du § 3.3 est claire :

Toutes les distributions de moment fléchissant S.A. pour la structure sous le type de chargement étudié, ont leurs extremums en les points fixes A_i ; pour la (ou les) distribution correspondant à l'équilibre limite, le moment fléchissant limite (constant) sera donc atteint en certaines sections A_{i_β} nécessairement, et c'est en ces sections que seront placées les rotules plastiques du mode de déformation licite associé.

Ainsi, il suffit d'appliquer la méthode cinématique sur la classe des modes de déformation licites dont les rotules plastiques sont en A_i pour être certain d'obtenir la valeur exacte de la charge limite.

Donc dans l'hypothèse où M_0^+ et M_0^- sont constants, le résultat du § 3.3 est encore valable d'une façon générale si la structure, du type général indiqué au § 2, et son chargement sont tels que toutes les distributions de moment fléchissant S.A. aient leurs extremums dans des sections fixes connues : ces sections jouent alors le rôle des A_i . C'est dans cette hypothèse, faite plus ou moins nettement, que Charnes *et al.* [4], démontrent la dualité.

Plus généralement encore, si M_0^+ et M_0^- ne sont pas constants dans la structure, le résultat reste valable si la structure et le chargement sont tels que pour toutes les distributions statiquement admissibles, il suffise pour que la condition (1) soit vérifiée dans toute la structure qu'elle le soit en un nombre fini de sections connues (connaître à l'avance les sections les plus menacées).

Les paragraphes suivants traitent de cas où cette hypothèse n'est pas satisfaite.

† Pour les résultats concernant la programmation linéaire on se reportera aux ouvrages classiques par exemple [8, 9].

4. STRUCTURE DE CARACTERISTIQUES HOMOGENES SOUMISE A DES FORCES REPARTIES INVARIABLES ET A DES FORCES CONCENTREES

Nous conservons les mêmes hypothèses concernant la structure que celles faites au début du § 3 ; en particulier les moments limites sont constants.

Le chargement comprend, outre les forces concentrées invariables et les forces concentrées variant proportionnellement au facteur λ , des charges réparties invariables (par exemple le poids) dont la densité et la direction sont constantes sur chaque segment $A_i A_{i+1}$.[†] De plus, pour simplifier l'exposé, on suppose que pour toutes les poutres les forces réparties sont parallèles à $-0y$, la densité par élément d'abscisse dx ayant pour valeur absolue d_i (c'est le cas du poids).

4.1 Méthode cinématique

Pour le nouveau type de chargement considéré ici, les distributions S.A. de moment fléchissant sont paraboliques sur les poutres chargées, et les sections d'extremum ne sont donc plus nécessairement en les points A_i comme au § 3.2 ; la localisation de ces sections n'est pas connue *a priori*.

On utilise couramment la méthode, d'aspect statique, suivante [1] :

On découpe chaque poutre $A_i A_{i+1}$ en h_i segments égaux par les points :

$$A_i^0 \equiv A_i, A_i^1, A_i^2, \dots, A_i^m, \dots, A_i^{h_i} \equiv A_{i+1}$$

et on procède alors comme au § 3.2 : les A_i^m jouent le rôle des points A_i en 3.2, et dans le calcul des éléments de réduction dans la section A_i^m on inclut évidemment l'effet des forces réparties ; on effectue en chaque point A_i^m la vérification des conditions (23) et (24) avec les nouvelles expressions où interviennent les forces réparties.

En fait, rien n'assure que les points A_i^m correspondent aux extremums des distributions de moment fléchissant S.A. La méthode n'est donc pas réellement une méthode statique.

Pourtant il est possible de situer avec précision la valeur de λ ainsi obtenue :

En effet, on a considéré toutes les distributions de moment fléchissant S.A. (comme au § 3.2) et on a cherché le maximum de λ sur toutes les distributions S.A. satisfaisant (1) en les points A_i^m . Or la distribution réelle, celle qui correspond à l'équilibre limite de la structure, fait partie de ces distributions : donc la méthode fournit un majorant de la charge limite.

Cela n'est pas étonnant car nous allons voir qu'elle a, en fait, un caractère cinématique.

Considérons parallèlement à la structure et au chargement donnés, une structure identique soumise au système de charge suivant : les forces concentrées constantes et variables données, pas de forces réparties, et en plus sur chaque segment $A_i^m A_i^{m+1}$ en A_i^m à droite et en A_i^{m+1} à gauche les deux forces concentrées invariables équivalentes à la charge répartie (c'est la présentation de [1]) : pour les mêmes valeurs de λ et des réactions d'appui, les distributions de moment fléchissant S.A. dans la structure sous les deux systèmes de charges se correspondent comme indiqué à la Fig. 2.

Pour ce deuxième système, les résultats du § 3 sont valables. On voit que la méthode ci-dessus est exactement l'application de 3.2 à la structure sous le nouveau système de charge, et on a donc obtenu la charge limite λ_i sous ce chargement. Nous savons que par dualité, c'est aussi l'application de la méthode cinématique de 3.1 au nouveau système, qui est encore une méthode cinématique pour le système donné—la puissance dissipée et la

[†] Les points A_i sont les points de division « naturels » du § 3. Dans la suite on appelle poutre i l'élément $A_i A_{i+1}$ de la structure, bien que celui-ci puisse en fait n'être qu'un segment de poutre.

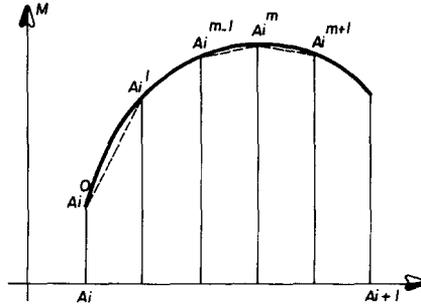


FIG. 2.

puissance des forces extérieures sont identiques dans les deux cas—donc λ_i est un majorant de la charge limite de la structure sous le chargement donné.

Il importe de ne pas se laisser abuser par la dualité mathématique qu'il y a, pour le système donné, entre la formulation apparemment statique et la formulation cinématique : on serait amené à en conclure comme au § 3 que l'on obtient la valeur exacte de la charge limite. En fait, cet aspect de méthode statique n'est, comme nous l'avons expliqué, qu'une apparence sauf précisément dans les cas qui ressortissent du § 3.

4.2 Méthode statique†

Nous allons construire une méthode réellement statique en discrétisant comme au § 3.1 mais en imposant à M en les points A_i^m une contrainte suffisante pour que (1) soit certainement vérifiée en tout point et que la distribution S.A. soit licite.

On sait que les distributions S.A. de moment fléchissant pour la structure réelle sont paraboliques sur chaque poutre:

$$M(x) = M_i \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{d_i(x - x_i)(x_{i+1} - x)}{2} \tag{27}$$

formule qui peut être aussi écrite sur chaque segment $A_i^m A_{i+1}^{m+1}$ en faisant intervenir $x_{i,m}$ et $x_{i,m+1}$ et les moments fléchissants en A_i^m et A_{i+1}^{m+1} .

Compte tenu de (25) et de $d_i > 0$ on voit qu'une condition suffisante pour que (1) soit satisfaite en tout point, est que :

$$\forall i, \forall m - M_0^- \leq M_{i,m} \leq M_0^+ - \frac{d_i}{8} \left(\frac{l_i}{h_i} \right)^2 \tag{28}$$

en posant : $l_i = x_{i+1} - x_i$.

On obtient donc une méthode statique qui fournit un minorant de la charge limite, en maximisant λ sur toutes les distributions de moment fléchissant S.A. vérifiant (28).

Cela ne conduit à un programme ayant une solution, que si (28) est compatible c'est-à-dire si h_i est suffisamment grand, et si de plus en les points $A_{i\delta}$ (cf. § 3) où $M = 0$ nécessairement, h_i et h_{i-1} sont suffisamment grands pour que (28) soit vérifiée.‡

† Rappelons que dans le § 4, on fait l'hypothèse que les forces sont uniformément réparties sur chaque poutre $A_i A_{i+1}$.

‡ Les valeurs minimales de h_i pour que ces conditions soient remplies sont évidentes.

S'il en est ainsi, on effectue en chaque point A_i^m la vérification des conditions analogues à (23) et (24) comme au § 4.1, mais où on remplace M_0^+ par :

$$M_0^+ - \frac{d_i \left(\frac{l_i}{h_i} \right)^2}{8}.$$

Signalons enfin que si les forces réparties ne sont pas parallèles à Oy , il suffit de se donner la densité des composantes selon Oy par élément dx , et celle des composantes selon Ox par élément dy , pour être ramené pratiquement au même problème que ci-dessus.

4.3 Convergence des deux méthodes

Les deux méthodes précédentes, à la différence de celles du § 3 ne fournissent pas la valeur exacte de la charge limite (sauf exception). Il importe de démontrer que si le pas de la discrétisation tend vers zéro, (i.e. $h_i \nearrow \infty \forall i$), le majorant et le minorant tendent vers la charge limite.

Pour cette démonstration nous utilisons la méthode des inconnues hyperstatiques [1]. Soit k le degré d'hyperstaticité de la structure, Z_ϕ ($\phi = 1 \dots k$) les inconnues hyperstatiques.

Toute distribution S.A. de moment fléchissant pour la structure est de la forme :

$$M(s) = \sum_{\phi=1}^k \alpha^\phi(s) Z_\phi + \beta(s) \lambda + \gamma(s) \quad (29)$$

où Z_ϕ et λ sont $(k+1)$ variables indépendantes et $\alpha^\phi(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$ des fonctions connues de s abscisse le long de la structure qui ne dépendent que de la géométrie de la structure et du type de chargement. (Ce sont les valeurs des moments fléchissants à l'abscisse s produits séparément, dans la structure isostatique de référence choisie, par $Z_\phi = 1$, $\lambda = 1$, et les charges permanentes.)

La distribution est licite si et seulement si :

$$-M_0^- \leq M(s) \leq M_0^+ \quad \forall s. \quad (30)$$

Le problème de la détermination de la charge limite est donc le problème de programmation convexe :

Maximiser λ

sous les conditions :

$$-M_0^- \leq \sum_{\phi=1}^k \alpha^\phi(s) Z_\phi + \beta(s) \lambda + \gamma(s) \leq M_0^+, \quad \forall s. \quad (31)$$

(On vérifie aisément que le domaine défini par (31) est un convexe K de $R^k \times R^+$.)

L'intérêt des méthodes des § 4.1 et 4.2 est qu'elles fournissent deux programmes linéaires encadrant le programme convexe (31) :

Désignons par $\alpha_{i,m}^\phi$, $\beta_{i,m}$, $\gamma_{i,m}$ les valeurs des fonctions α^ϕ , β , γ , en les points de discrétisation $A_{i,m}$.

La méthode cinématique de § 4.1 consiste à :

Maximiser λ

sous les conditions :

$$-M_0^- \leq \sum_{\phi=1}^k \alpha_{i,m}^{\phi} Z_{\phi} + \beta_{i,m} \lambda + \gamma_{i,m} \leq M_0^+ \quad (32)$$

$$i = 1, \dots, n-1, \quad m = 0, \dots, h_i$$

qui définissent un polyèdre convexe Q_h extérieur à K .

Et la méthode statique du § 4.2 :

Maximiser λ

sous les conditions :

$$-M_0^- \leq \sum_{\phi=1}^k \alpha_{i,m}^{\phi} Z_{\phi} + \beta_{i,m} \lambda + \gamma_{i,m} \leq M_0^+ - \frac{d_i}{8} \left(\frac{l_i}{h_i} \right)^2 \quad (33)$$

qui définissent un polyèdre convexe P_h dont on a démontré (§ 4.2) qu'il est intérieur à K .

Pour prouver la convergence du procédé statique on va démontrer que quand $h_i \nearrow \infty$ ($\forall i$), le polyèdre P_h tend vers le convexe K : la fonction objective étant continue cela entraîne bien la convergence du minorant fourni par la méthode statique, vers la valeur exacte.

Cette démonstration est donnée en annexe.

Elle prouve aussi que le polyèdre Q_h tend vers K quand $h \nearrow \infty$. Puisque le procédé cinématique du § 4.1 consiste, dans sa formulation pseudo-statique à maximiser λ sur Q_h , la convergence du procédé cinématique est ainsi démontrée : le majorant tend vers la valeur exacte de la charge limite quand $h \nearrow \infty$.

De plus, si l'augmentation du nombre de points de discrétisation est faite en ajoutant de nouveaux points à ceux de l'étape précédente, on peut affirmer que la suite des valeurs de λ obtenues est non croissante.

Il n'est malheureusement pas possible de démontrer une propriété de non décroissance analogue pour la suite de valeurs du minorant fournie par la méthode statique.

5. EXTENSIONS DIVERSES

Nous signalons maintenant, sans nous appesantir, diverses généralisations possibles des méthodes employées.

5.1 Forces réparties variables avec λ

On suppose que les forces réparties, constantes le long de chaque poutre comme au § 4, varient proportionnellement à λ .

Les principes des procédés cinématique et statique sont exactement les mêmes ; pour la méthode statique il y a seulement lieu de remplacer (28) par :

$$-M_0^- \leq M_{i,m} \leq M_0^+ - \lambda \frac{d_i}{8} \left(\frac{l_i}{h_i} \right)^2. \quad (40)$$

La démonstration de la convergence des deux procédés est analogue et les conclusions auxquelles on aboutit sont exactement les mêmes.

Le cas où il y a à la fois des forces réparties invariables et des forces réparties variables avec λ se traite également sans difficulté.

5.2 Forces réparties non uniformément sur chaque poutre

On suppose maintenant que les forces réparties (invariables par exemple) de direction fixe parallèle à $-0y$, ont une densité $d_i(s)$ non uniforme (c'est par exemple le poids d'une poutre de section variable), pouvant même changer de signe.

Il n'y a absolument rien à changer à la formulation du procédé cinématique donnée au § 4.1.

Pour la méthode statique : on commence, s'il y a lieu, par inclure dans les points de division fondamentaux A_i , en plus de ceux indiqués au § 3, les points sur chaque poutre où $d_i(s)$ change de signe. On procède ensuite à la discrétisation comme au § 4.2 (points $A_{i,m}$), et sur chaque tronçon $d_i(s)$ a un signe constant.

Considérons un tronçon sur lequel $d_i(s) \geq 0$:

Soit : $d_i = \text{Sup}|d_i(s)|$, $s \in A_{i,m}A_{i,m+1}$.

On vérifie aisément qu'il suffit d'imposer :

$$-M_0^- \leq M_{i,m} \leq M_0^+ - \frac{d_i}{8} \left(\frac{l_i}{h_i} \right)^2 \quad (41)$$

$$-M_0^- \leq M_{i,m+1} \leq M_0^+ - \frac{d_i}{8} \left(\frac{l_i}{h_i} \right)^2. \quad (42)$$

Pour être certain que la distribution S.A. correspondant à :

$$M(s = A_{i,m}) = M_{i,m}$$

$$M(s = A_{i,m+1}) = M_{i,m+1}$$

est licite sur $A_{i,m}A_{i,m+1}$.

De même un tronçon où $d_i(s) \leq 0$, posant $d_i = \text{Sup}|d_i(s)|$, $s \in A_{i,m}A_{i,m+1}$ (41) est remplacée par :

$$-M_0^- + \frac{d_i}{8} \left(\frac{l_i}{h_i} \right)^2 \leq M_{i,m} \leq M_0^+ \quad (43)$$

[et modification analogue de (42) pour $M_{i,m+1}$]. On obtient ainsi un programme statique.

5.3 Cas des systèmes d'arcs

Nous mentionnons encore le cas où la structure n'est plus nécessairement en forme de ligne brisée et comprend des arcs.

Les forces réparties sont supposées parallèles à $-0y$ et de densité égale, par élément dx , à $d_i(s)$; ou bien si les forces réparties sont de direction quelconque, éventuellement même variable on donnera la densité des composantes selon $-0y$ par élément dx et celle des composantes selon $0x$ par élément dy .

Pour la méthode cinématique : il n'y a aucune modification à apporter, le calcul des forces concentrées équivalentes aux forces réparties est immédiat.

La méthode statique est par contre beaucoup plus délicate à mettre en oeuvre, et en pratique on n'utilisera que la méthode cinématique.

6. EXEMPLE DE CALCUL

Pour illustrer les deux méthodes proposées, nous considérons un exemple très simple (pour lequel l'emploi de l'ordinateur n'est absolument pas nécessaire), la structure étudiée est représentée à la Fig. 3.

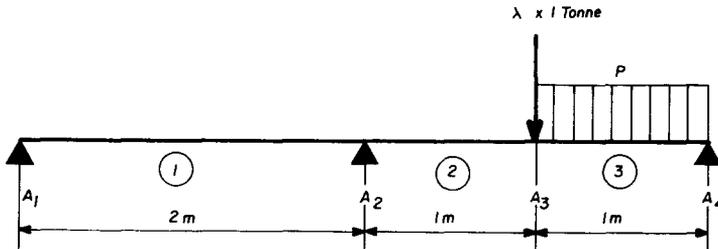


FIG. 3.

Forces exprimées en tonnes

p en t/m ;

M en $t \times m$;

l en m .

On suppose que $p = 10 t/m$, et que le moment limite est constant dans toute la structure, avec:

$$M_0^+ = -M_0^- = M_0 = 3,2 t \times m.$$

Pour $h_3 = 1$

on obtient:

par la méthode statique: $\lambda = 2,1$

par la méthode cinématique: $\lambda = 4,6$.

Pour $h_3 = 2$

méthode statique: $\lambda = 3,9750$

méthode cinématique: $\lambda = 4,6$.

Pour $h_3 = 4$

méthode statique: $\lambda = 4,025$

méthode cinématique: $\lambda = 4,233$.

Alors que la valeur exacte de λ qui se détermine ici aisément est 4,2.

Il peut se faire, dans certains problèmes, que la méthode statique, ou la méthode cinématique fournisse la valeur exacte de la charge limite; il n'est en général pas possible de détecter ce fait, sauf si l'une et l'autre méthode fournissent la même valeur de λ et l'on sait alors que celle-ci est la valeur exacte.

Ainsi dans le problème ci-dessus, en prenant:

$$M_0 = 2,8125 t \times m$$

la méthode statique pour $h_3 = 2$ donne $\lambda = 2,8125$, la méthode cinématique pour $h_3 = 4$ donne aussi $\lambda = 2,8125$ qui est donc la valeur exacte.

Remerciements—Nous remercions MM. les Professeurs Mandel et Radenkovic de l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail.

REFERENCES

- [1] G. CERADINI et C. GAVARINI, Calcolo a rottura e programmazione lineare. *G. Genio civ.* **12**, 48–64 (1965).
 [2] G. CERADINI et C. GAVARINI, Calcolo a rottura e programmazione lineare continui bi e tridimensionali—I. *G. Genio civ.* **2–3**, 125–137 (1968).
 [3] A. CHARNES et H. J. GREENBERG, Plastic collapse and linear programming. *Bull. Am. Math. Soc.* **57**, 480 (1951).
 [4] A. CHARNES, C. E. LEMKE et D. C. ZIENKIEWICZ, Virtual work, linear programming and plastic limit analysis. *Proc. R. Soc. A.* **110–116** (1959).
 [5] C. GAVARINI, I teoremi fondamentali del calcolo a rottura e la dualità in programmazione lineare. *Ingegn. Civ.* **18** (1966).
 [6] C. GAVARINI, Plastic analysis of structures and duality in linear programming. *Meccanica* **1**, 3–4, 95–97 (1966).
 [7] C. GAVARINI, Calcolo a rottura e programmazione non-lineare. *C.r. Ist. Lomb. Sci. Lett.* **A102**, 329–342 (1968).
 [8] H. P. KÜNZI, W. KRELLE et W. DETTLI, *La Programmation non Linéaire*. Gauthier Villars (1969).
 [9] H. P. KUNZI, H. G. IZSCHACH et C. A. ZEHNDER, *Numerical Methods of Mathematical Optimization*. Academic Press (1968).
 [10] G. SACCHI et G. BUZZI-FERRARIS, Sul criterio cinematico di calcolo a rottura di piastra inflesse mediante programmazione lineare. *C.r. Ist. Lomb. Sci. Lett.* **101** (1967).
 [11] G. SACCHI et M. SAVE, On the evaluation of the limit load for rigid perfectly-plastic continua. *Meccanica* **3**, 3, 1–8 (1968).

ANNEXE

On va montrer que quand $h_i \nearrow \infty$, le volume compris entre les polyèdres Q_h et P_h tend vers zéro, ce qui entraîne bien la convergence l'un vers l'autre et vers K des ces deux polyèdres convexes.

Construction d'un polyèdre auxiliaire π_h

On élimine d'abord les hyperplans de (33) qui ne sont pas facette de P_h et on définit π_h par les inégalités : $M_{i,m} \leq M_0^+$ (resp. $M_{i,m} \geq -M_0^-$) pour i, m tels que sur P_h :

$$M_{i,m} = M_0^+ - \frac{d_i \left(\frac{l_i}{h_i} \right)^2}{8} = M_0^+ - \frac{K_i}{h_i^2} \text{ (resp. } M_{i,m} = -M_0^- \text{).} \quad (34)$$

On a alors les inclusions évidentes :

$$P_h \subset K \subset Q_h \subset \pi_h.$$

Soit $e_{i,m}$ la distance entre chaque hyperplan (34) facette de P_h et l'hyperplan correspondant facette de π_h .

On désigne par S_h l'aire latérale de Q_h , et par V_h le volume compris entre P_h et Q_h . Celui-ci est majoré par le produit de S_h par le maximum de la distance des points du contour de Q_h à P_h , d'où *a fortiori* la majoration :

$$V_h \leq S_h \max e_{i,m};$$

et puisque Q_h est évidemment intérieur à Q_1 (où $h_i = 1, \forall i$)

$$V_h \leq S_1 \max e_{i,m}. \quad (35)$$

Majorants de $e_{i,m}$

On a :

$$e_{i,m} = \frac{K_i}{h_i^2} \times \frac{1}{|\text{grad } M_{i,m}|} \tag{36}$$

où $\text{grad } M_{i,m}$ est le gradient du moment fléchissant en $A_{i,m}$ par rapport à Z_1, \dots, Z_k et λ .

On cherche une majoration de $e_{i,m}$ pour toutes les facettes de P_h . Pour cela il faut minorer $|\text{grad } M_{i,m}|$.

D'après (27) on a :

$$\text{grad } M_{i,m} = \left(\frac{h_i - m}{h_i} \text{grad } M_i + \frac{m}{h_i} \text{grad } M_{i+1} \right) \tag{37}$$

et dans l'espace R^{k+1} l'extrémité du vecteur $\text{grad } M_{i,m}$ se trouve sur le segment $G_i G_{i+1}$ ($OG_i = \text{grad } M_i, OG_{i+1} = \text{grad } M_{i+1}$).

Alors, si 0 n'est pas sur ce segment, il existe un minimum non nul de $\text{grad } M_{i,m} \forall h_i, \forall m \leq h_i$. S'il en est ainsi pour toutes les poutres, on a pour $\text{grad } M_{i,m}$ un minorant non nul $C \forall i, \forall m, \forall h_i$.

Si 0 $\in G_i G_{i+1}$, il existe alors un point s_0 de la poutre i , où $\alpha^\phi(s_0) = 0, \forall \phi$, et $\beta(s_0) = 0$: le moment fléchissant y est donc constant et égal au moment des charges invariables. Le chargement $\lambda = 0$ étant supposé licite par hypothèse, cela nécessite que $M(s_0)$ vérifie (1).

Il n'y a aucun problème si $M(s_0) < M_0^+$: en effet, pour h suffisamment grand, le point s_0 et un intervalle autour de lui ne fournissent plus de facette de P_h et l'on est ramené au cas précédent.

Le cas où $M(s_0) = M_0^+$ nécessite des raisonnements plus longs que nous ne pensons pas utile de donner ici, leur intérêt pratique étant faible. D'une façon générale, dans ce cas, si le problème a une solution, c'est-à-dire si le chargement $\lambda = 0$ est bien licite, on montre que le module du gradient peut être minoré, mais ceci nécessite que l'on atteigne de grandes valeurs de h .

$|\text{Grad } M_{i,m}|$ étant donc minoré par C non nul, pour les hyperplans facettes de $P_h, \forall i, \forall m, \forall h_i$ suffisamment grand, on a alors d'après (34):

$$\forall i, \forall m, \forall h_i > H$$

$$e_{im} < \frac{K_i}{h_i^2} \frac{1}{C} < \frac{K}{h^2} \frac{1}{C} \tag{38}$$

en posant $K = \sup_i K_i$ et $h = \text{Inf}_i h_i$ d'où :

$$V_h \leq S_1 \frac{K}{h^2} \frac{1}{C} \tag{39}$$

dont on déduit que $V_h \rightarrow 0$ si $h \nearrow \infty$. CQFD.

Abstract—The paper is concerned with structures which can be called monodimensional.

We show that the so-called statical method for the determination of the limit load which is often used for such structures, is actually an application of the upper bound theorem. A method which is really statical is proposed.

The question of duality between the formulations of the statical and of the kinematical methods is thoroughly discussed in order to avoid some misunderstandings.

The proof of convergence of the two methods is given.

Абстракт—Работа касается конструкций, которые можно назвать одномерными.

Указано, что так называемый статический метод, для определения предела нагрузки, используемый часто для таких конструкций, оказывается фактически применением теоремы верхнего предела.

Предлагается действительно статический метод.

Обсуждается вполне вопрос двойственности формулировок статического и кинематического методов, с целью избежания некоторых недоразумений.

Приводится доказательство сходимости этих двух методов.